1)

$$u' = 2u - 4v \qquad ; \qquad u(0) = v(0) = -1$$
$$v' = u - 3v$$

Lambda matice soustavy je

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & -4 \\ 1 & -3-\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3-\lambda \\ 2-\lambda & -4 \end{pmatrix} \;\; -(2-\lambda)$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -3-\lambda \\ 0 & \underbrace{(3+\lambda)(2-\lambda)-4}_{-\lambda^2-\lambda+2} \end{pmatrix}$$

Dostáváme rovnici

$$-v'' - v' + 2v = 0$$

Char. pol. je

$$-\lambda^2 - \lambda + 2 = -(\lambda - 1)(\lambda + 2)$$

Dostáváme FS:

$$\{ e^t, e^{-2t} \}$$

Obecné řešení je

$$v(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{-2t}$$

Z prvního řádku matice dostaneme rovnici:

$$u - 3v - v' = 0$$

$$u(t) = 3v(t) + v'(t) = 3c_1 e^{t} + 3c_2 e^{-2t}$$
$$+ c_1 e^{t} - 2c_2 e^{-2t}$$
$$= 4c_1 e^{t} + c_2 e^{-2t}$$

Dobro mády

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} 4e^{t} & e^{-2t} \\ e^{t} & e^{-2t} \end{pmatrix} \cdot C$$

$t \in \mathbb{R}, \ C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

Z poč. podm.:

$$\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot C$$

i.e.
$$\left(\begin{array}{cc|c} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{array}\right) -4 \sim \left(\begin{array}{cc|c} 0 & -3 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$c_2 = -1$$
$$c_1 = 0$$

i.e. dostávám řešení

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} -e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix}$$

2)
$$u' = u - 4v \qquad u(0) = 0$$
$$v' = 2u - 3v \quad ; \quad v(0) = -1$$

λ-matice má tvar:

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & -4 \\ 2 & -3-\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -3-\lambda \\ 1-\lambda & -4 \end{pmatrix} \cdot -\frac{1}{2}(1-\lambda) \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & -3-\lambda \\ 0 & -4+\frac{1}{2}(1-\lambda)(3+\lambda) \end{pmatrix} \underset{\cdot(-2)}{\sim} \begin{pmatrix} 2 & -3-\lambda \\ 0 & \lambda^2+2\lambda+5 \end{pmatrix}$$

Dostaneme rovnici pro v s char. pol.

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5,$$ kořeny jsou

$$\frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} = -1 \pm 2i$$

Z tvaru FS dostáváme obecné řešení:

$$v(t) = c_1 e^{-t} \sin(2t) + c_2 e^{-t} \cos(2t)$$

Z prvního řádku matice:

$$2u - 3v - v' = 0 \quad \text{i.e.}$$

$$2u(t) = 3v(t) + v'(t)$$

$$= 3c_1 e^{-t} \sin(2t) + 3c_2 e^{-t} \cos(2t)$$

$$- c_1 e^{-t} \sin(2t) + 2c_1 e^{-t} \cos(2t)$$

$$- c_2 e^{-t} \cos(2t) - 2c_2 e^{-t} \sin(2t)$$

$$= c_1 \left(2e^{-t} \sin(2t) + 2e^{-t} \cos(2t) \right)$$

$$+ c_2 \left(2e^{-t} \cos(2t) - 2e^{-t} \sin(2t) \right)$$

Obecné řešení

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t}(\sin(2t)+\cos(2t)) & e^{-t}(\cos(2t)-\sin(2t)) \\ e^{-t}\sin(2t) & e^{-t}\cos(2t) \end{pmatrix} \cdot C$$

$t \in \mathbb{R}$, $\quad C \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad C_2 = -1$$

$$C_1 = 1$$

Postávan řešení: $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} 2\sin(2t) \\ -\cos(2t) + \sin(2t) \end{pmatrix}.$

3)
$$u' = -7u + 9v \qquad u(0) = 3$$
$$v' = -u - v \quad ; \quad v(0) = 6$$

λ-matice je:

$$\begin{pmatrix} \lambda+7 & -9 \\ 1 & \lambda+1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \lambda+1 \\ \lambda+7 & -9 \end{pmatrix} \cdot\big(-(\lambda+7)\big) \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & \lambda+1 \\ 0 & -\lambda^2-8\lambda-16 \end{pmatrix} \cdot(-1) \sim \begin{pmatrix} 1 & \lambda+1 \\ 0 & \lambda^2+8\lambda+16 \end{pmatrix}$$

Dostávám rovnici pro v jejíž char. pol. je $\lambda^2 + 8\lambda + 16 = (\lambda + 4)^2$

Ze tvaru FS dostávám obecné řešení:

$$v(t) = c_1 e^{-4t} + c_2 t e^{-4t}$$

$$u + v + v' = 0$$

$$u(t) = -v - v' = -c_1 e^{-4t} - c_2 t e^{-4t} + 4c_1 e^{-4t} + 4c_2 t e^{-4t} - c_2 e^{-4t}$$

$$= c_1 \left(3e^{-4t} \right) + c_2 \left(3te^{-4t} - e^{-4t} \right)$$

Doloromady

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} 3e^{-4t} & 3te^{-4t} - e^{-4t} \\ e^{-4t} & te^{-4t} \end{pmatrix} \cdot c$$

$$t \in \mathbb{R}, \quad c \in \mathbb{R}^2$$

Z poč. pod.:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad c_1 = 6$$

$$c_2 = 15$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(t) = e^{4t} \begin{pmatrix} 3 + 45t \\ 6 + 15t \end{pmatrix}$$

4) $$u' = v$$
$$v' = -u$$

λ - matice má tvar

$$\begin{pmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ \lambda & -1 \end{pmatrix} \cdot(-\lambda) \sim \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & -1-\lambda^2 \end{pmatrix} \cdot(-1)$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1+\lambda^2 \end{pmatrix}$$

Dostávám rovnici pro v s char. pol.

$$\lambda^2+1 = (\lambda+i)(\lambda-i)$$

Obecné řešení je ze tvaru FS

$$v(t) = C_1 \sin(t) + C_2 \cos(t)$$

Z prvního řádku dostávám

$$u(t) + v'(t) = 0 \quad \text{i.e.}$$

$$u(t) = -v'(t) = -C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t)$$

Obecné řešení:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} -\cos(t) & \sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \cdot C$$

$t \in \mathbb{R}, \; C \in \mathbb{R}^2$

$$\left.\begin{aligned} u' &= v \\ v' &= -u \end{aligned}\right\} \Leftrightarrow u'' + u = 0$$

5)

$$u' = 2u + v - w$$
$$v' = 7u + 4v - w$$
$$w' = 13u + 7v - 3w$$

λ-matice má tvar:

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 7 & 4-\lambda & -1 \\ 13 & 7 & -3-\lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} (-1) \\ \\ -3-\lambda \end{matrix} \sim$$

$$
\begin{array}{cc}
\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 5+\lambda & 3-\lambda & 0 \\ \lambda^2+\lambda+7 & 4-\lambda & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ (-1) \end{array}
\end{array}
\sim
\begin{array}{cc}
\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ -\lambda^2-2 & -1 & 0 \\ \lambda^2+\lambda+7 & 4-\lambda & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} \\ \\ (4-\lambda) \end{array}
\end{array}
$$

$$
\sim \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ -\lambda^2-2 & -1 & 0 \\ \lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
$$

Dostávám rovnici pro u s char. pol.

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 2\lambda + 1)$$
$$= (\lambda - 1)^3$$

Ze tvaru FS dostávám obecné řešení

$$u(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 t^2 e^t$$
$$u'(t) = c_1 e^t + c_2 e^t (t+1) + c_3 e^t (t^2 + 2t)$$
$$u''(t) = c_1 e^t + c_2 e^t (t+2) + c_3 e^t (t^2 + 4t + 2)$$

Ze druhého řádku matice:

$$-v - u'' - 2u = 0 \quad \text{i.e.}$$

$$v(t) = -2u(t) - u''(t) = -2c_1e^t - 2c_2te^t - 2c_3t^2e^t$$
$$-c_1e^t - c_2e^t(t+2) - c_3e^t(t^2+4t+2)$$

$$= c_1(-3e^t) + c_2e^t(-3t-2)$$
$$+ c_3e^t(-3t^2-4t-2)$$

Z první řádku matice:

$$-w + v + 2u - u' = 0$$

$$w(t) = v(t) + 2u(t) - u'(t)$$

$$= C_1\left(-3e^t + 2e^t - e^t\right)$$

$$+ C_2\left(-3te^t - 2e^t + 2te^t - te^t - e^t\right)$$

$$+ C_3\left(-3t^2e^t - 4te^t - 2e^t + 2t^2e^t - t^2e^t - 2te^t\right)$$

Obecné řešení

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}(t) = e^t \left(\begin{pmatrix} 1 & t & t^2 \\ -3 & -3t-2 & -3t^2-4t-2 \\ -2 & -2t-3 & -2t^2-6t-2 \end{pmatrix} \right),$$

$$t \in \mathbb{R}, \quad c \in \mathbb{R}^3 .$$